Лабораторная работа №2   
Решение матричных игр в смешанных стратегиях с помощью линейной оптимизации

Оптимальные стратегии игроков в играх без седловых точек могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейной оптимизации.

|  |  |
| --- | --- |
| Определение стратегий игрока I | Определение стратегий игрока II |
|  |  |

Цена игры и вероятности применения стратегий игроками I и II равны:



***Пример 1.***

Найдите решение парной игры с заданной платежной матрицей, приведенной ниже. Решите задачу с помощью линейной оптимизации, определите цену игры и вероятности применения активных стратегий.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 14 | 20 | 32 | 8 |
| A2 | 15 | 11 | 19 | 37 |
| A3 | 33 | 9 | 16 | 34 |

***Пример 2.***

Два конкурирующих предприятия имеют следующие доли общего сбыта своей продукции на местном рынке: 53% предприятие 1 и 47% – предприятие 2. Для увеличения объема своих продаж у них имеются следующие альтернативы:  – расширить сеть сбыта,  – увеличить затраты на рекламу своей продукции,  – расширить ассортимент,  – ничего не предпринимать.

Анализ показал, что при реализации обоими предприятиями указанных мероприятий доля (в %) предприятия на рынке изменится следующим образом:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Стратегия предприятия 1 | Стратегия предприятия 2 | | | |
|  |  |  |  |
|  | -4 | -5 | -1 | 6 |
|  | -1 | 0 | -3 | 5 |
|  | -3 | 1 | -5 | 5 |
|  | -8 | -7 | -6 | 0 |

Требуется сформулировать данную ситуацию в виде игры и определить оптимальные смешанные стратегии обоих предприятий.

***Решение.*** Обратите внимание, что в данном примере для обоих игроков имеются доминируемые стратегии. Найдите и исключите их из матрицы игры.

Затем необходимо избавиться от отрицательных значений элементов платежной матрицы. Для этого прибавьте к каждому элементы матрицы достаточно большое положительное число.

Запишите и решите прямую и двойственную задачи ЛП и определите вероятности применения чистых стратегий обоими игроками:

Вы должны получить следующий результат.

Цена игры, соответствующая первоначальной матрице, равна –2,2 (после того, как на начальном этапе мы прибавили ко всем элементам некоторое число, теперь необходимо его вычесть).

Предприятие 1 при многократном повторении игры должно использовать с частотой 0,4 стратегию  (расширить сеть сбыта), с частотой   
0,6 – стратегию – (расширение рекламной деятельности), а стратегии  (увеличить ассортимент) и  (ничего не предпринимать) не использовать вовсе. При этом доля сбыта предприятия на рынке ***уменьшится*** на 2,2%.

В свою очередь, оптимальная смешанная стратегия предприятия   
2 заключается в том, чтобы с частотой 0,4 использовать стратегию  (расширить сеть сбыта), и с частотой 0,6 – стратегию – (расширение ассортимента). Стратегии  (расширение рекламной деятельности) и  (ничего не предпринимать) не должны применяться. При этом доля сбыта предприятия 2 на рынке ***увеличится*** на 2,2%.

Казалось бы, поскольку даже в результате проведения своих мероприятий предприятие 1 “теряет рынок”, ему не следует ничего предпринимать, однако в этом случае оно потеряет еще больше (в соответствии   
со стратегией ) из-за действий предприятия 2, которому они выгодны.

***Определение выигрышей в игре без седловых точек***

Средний выигрыш игрока А в том случае, когда оба игрока применяют свои оптимальные смешанные стратегии (функция выигрыша игрока А в смешанных стратегиях) равен



где вектор-строка задает вероятности применения различных чистых стратегий первым игроком ,  - платежная матрица и  – вектор-столбец вероятностей применения чистых стратегий вторым игроком:



В тех случаях, когда один из игроков применяет чистую стратегию,   
а второй – смешанную, нужно “занулить” все вероятности, соответствующие неиспользуемым этим игроком стратегиям. Например, если первый игрок использует чистую стратегию , то для определения выигрыша достаточно заменить вектор  на вектор .

***Пример 3.*** Задана платежная матрица

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | 0 | 1/2 | 5/6 |
|  | 1 | 3/4 | 1/2 |

Пусть оптимальные смешанные стратегии игроков А и В уже определены:



Требуется определить выигрыши игрока А в ситуациях, когда

1. игрок В применяет смешанную стратегию;
2. игрок В применяет одну из чистых стратегий (,, или ).

Проанализируйте полученные результаты.